

Dans cette séance on va voir

(i) la décomposition en valeurs singulières (2ème partie)

12.12

77

③ Calcul de la matrice U (suite)

Méthode 2 → Méthode directe: BON de $\text{Ker}(A^T)$
 $= \text{Ker}(AA^T)$

$$\textcircled{3} \textcircled{i} \quad \bar{u}_j = \frac{A\bar{v}_j}{\sigma_j}, \quad 1 \leq j \leq l$$

③ ii Si $l < m$, on calcule une base de
 $\text{Ker}(A^T) \stackrel{\text{FAIT}}{=} \text{Ker}(AA^T) : \{\bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$

et on applique GS à $\{\bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\}$
pour obtenir une BON $\{\bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\}$
de $\text{Ker}(A^T)$.

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_l \quad \bar{u}_{l+1} \dots \bar{u}_m]$$

Point important: $\sigma_j = \|A\bar{v}_j\|, \quad \forall 1 \leq j \leq l$!!!

Exemple / Exercice 14.14 On va calculer la SVD de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} m=3 \\ n=2 \end{matrix}$

Abs

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

① On calcule Σ

① ① On calcule les valeurs propres de $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 2(2-4)$$

$\Rightarrow 4, 0$ sont les valeurs propres de $A^T A$ (chacune a multiplicité 1)

② $4 > 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{4} = 2 > 0$

et on pose

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} m=3 \\ n=2 \end{matrix}$$

2 On calcule V

$\rightarrow$ On calcule une BON de E_2 pour chaque 2 valeurs propres de $A^T A$:

• Pour $\lambda=4$ $\xrightarrow{\text{FER}}$

$$E_4 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{BON de } \mathbb{E}_1 \text{ est } \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_1}$$

• Pour $\boxed{\lambda=0}$ FEB ↓

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{BON de } \mathbb{E}_0 \text{ est } \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_2}$$

On pose donc

$$V := \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{n=2} \quad \checkmark \quad m=2$$

③ On calcule U (On va utiliser la méthode 2)

$$\textcircled{3} \textcircled{ii} \quad \left[\bar{u}_1 := \frac{A \cdot \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

③ ① Dans ce cas $\boxed{\ell(\text{rang}(A)) = 1} \leftarrow \# \{ \sigma_j > 0 \} ?$

On calcule donc une base de $\text{Ker}(A^T)$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Or, si l'on applique GS à $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
on trouve la BON de $\text{Ker}(A^T)$:

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_3} \right\}$$

On pose

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{V^T} \\
 &= U \Sigma V^T
 \end{aligned}$$

Exemple / Exercice 14.16

On va calculer la SVD de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix}$$

Alors

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

① On calcule Σ

① ① On calcule les valeurs propres de $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda) \left[(10-\lambda)(2-\lambda) - 4 \right]$$

$$-4 \left[(10-\lambda) 4 \right] = -(\lambda-10) \left[\lambda^2 - 12\lambda + 16 - 16 \right] = -(\lambda-12)(\lambda-10) \cdot \lambda$$

$\Rightarrow$ les valeurs propres de $A^T A$ sont $12, 10$ et 0

On pose

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Downarrow \\ \sigma_1 = \sqrt{12} \text{ et } \sigma_2 = \sqrt{10} \end{matrix}$$

② On calcule V

$\rightarrow$ Une BON pour chaque E_λ , λ valeur propre de $A^T A$

• Pour $[\lambda=12]$

FER

$$\begin{aligned} E_{12} &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_{12} \text{ est } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

• Pour $\lambda = 10$ FER

$$E_{10} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_{10} : \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_2}$$

• Pour $\lambda = 0$

FER

$$E_0 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -\frac{x_2}{5} \\ x_2 = -\frac{2x_3}{5} \end{matrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_0 : \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_3}$$

On pose

$$V := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

③ On calcule U

③ ① $\bar{u}_1 = \frac{A\bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}{\sqrt{12}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_2 = \frac{A\bar{v}_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On pose

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}}_{V^T} = U \Sigma V^T$$